<u>Лекция 11.</u>

Движение электронов во внешнем стационаром магнитном поле. Траектория, по которой движется электрон в магнитном поле. Понятие годографа. Циклотронная эффективная масса. Диамагнитный резонанс. Представление расширенных зон.

Магнитное поле энергии не меняет, следовательно, примитивный учет его как дополнительное слагаемое в гамильтониане – невозможен. Однако здесь работает другой простой подход.

$$
\begin{array}{ccc}
H=0 & \to\to\to\to & H\neq 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
E_n(\hbar\vec{q}) & \to\to & E_n\left(\hbar\vec{q}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)
\end{array}
$$

Энергия как функция остается неизменной; но

$$rot\vec{A}=\vec{H}$$

меняется ее аргумент (градиентная инвариантность).

То есть теперь $\vec{p}=\hbar\vec{q}-\frac{e}{c}\vec{A}$ - (новый) кинематический квазиимпульс. Как он меняется со временем?

$$\overbrace{\left(\hbar\vec{q}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)}^{\bullet}=?$$

Оценим, сколь сильно влияет магнитная добавка на изменении квазиимпульса.

$\vec{A}=(-Hy,0,0)\rightarrow rot\vec{A}=(0,0,H)$ - калибровка Ландау.

$$\hbar\vec{q}-\frac{e}{c}\vec{A}=\left(p_x+\frac{eH}{c}y,p_y,p_z\right) \qquad \vec{p}\equiv\hbar\vec{q}$$

Следовательно, влияние магнитного поля оценивается отношением $\rightarrow$

$$\frac{\frac{eH}{c}|y|}{p_x} \sim \frac{\frac{eH}{c}a}{p_x} \sim \frac{\frac{eH}{c}\frac{\hbar}{p_F}}{p_F} \sim \frac{\hbar\left(\frac{eH}{cm^*}\right)}{p_F^2 / m^*} \sim \frac{\hbar\omega_*}{\varepsilon_F}$$

Здесь $\omega_* = \frac{eH}{cm^*}$ -циклотронная (Ларморова) частота.

y - декартова координата - локализация электрона, ограниченная размерами ячейки.

$a \cdot p_F \sim \hbar$

$p_x \sim p_F$

$$\hbar\omega_* = \hbar\frac{eH}{cm^*} \sim \cancel{10^{-27}}\frac{5{\cdot}10^{-10}\cdot 1гс}{3{\cdot}10^{10}\cdot\cancel{10^{-27}}}\underbrace{\left[H\right]}_{\text{числен. знач. поля (без размерн.)}} \sim 10^{-20}\frac{\left[H\right]эрг}{1{,}6{\cdot}10^{-12}\frac{эрг}{eV}}$$

$$\sim 10^{-8}\left[H\right]eV$$

Таким образом, отношение характерной магнитной энергии к энергии Ферми составляет

$$\frac{\hbar\omega_*}{\varepsilon_F} \sim \frac{10^{-8}[H]}{10} \sim 10^{-9}\underbrace{\left(10^4 \div 10^5\right)}_{[H]}$$

Это ничтожно малый параметр по сравнению с параметром адиабатичности $\sim 10^{-3}$.

$$\boxed{\frac{\frac{eH}{c}|y|}{p_x} \sim 10^{-5} \div 10^{-4}}$$

Таким образом, на размерах ячейки можно считать поле постоянным, и можно провести разложение.

$$\overbrace{\left(\hbar\vec{q}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)}^{\bullet}=\frac{i}{\hbar}\left[E_n\left(\hbar\vec{q}-\frac{e}{c}\vec{A}\right),\ \hbar\vec{q}-\frac{e}{c}\vec{A}\right]$$

Тогда уравнение движения :

$$\hbar\dot{\vec{q}}=\frac{i}{\hbar}\left[E_n(\hbar\vec{q})+\frac{\partial E_n(\hbar\vec{q})}{\partial\hbar\vec{q}}\cdot\left(-\frac{e}{c}\vec{A}\right)+\ldots,\hbar\vec{q}-\frac{e}{c}\vec{A}\right]\simeq$$

$$\simeq\frac{i}{\hbar}\left\{\underbrace{\left[\cancel{E_n(\hbar\vec{q}),}\hbar\vec{q}\right]}_{0}+\frac{\partial E_n(\vec{q})}{\underbrace{\hbar\partial q_\alpha}_{\substack{\text{групповая}\\ \text{скорость}}}}\cdot\left(-\frac{e}{c}\vec{A}\right)\left[A^\alpha,\hbar\vec{q}\right]+\left[E_n(\hbar\vec{q}),-\frac{e}{c}\vec{A}\right]+\ldots\right\}$$

$\left[A^\alpha,\hbar\vec{q}\right]$ - это не векторное произведение, это коммутатор.

$$A^\alpha=-H\hat{y}\delta^{\alpha x}$$

$$\hbar\dot{q}_x \simeq \frac{i}{\hbar}\left\{-\frac{e}{c}V_n^x H\underbrace{\left[\cancel{-\hat{y},\hbar q_x}\right]}_{0}+\left[E_n(\hbar\vec{q}),-\frac{e}{c}\left(-H\hat{y}\right)\right]\right\}$$

Ограничимся движением внутри одной зоны (Ω не дает вклада); $\quad \hat{y}=i\dfrac{\partial}{\partial q_y}$

$$\hbar\dot{q}_x \approx \frac{i}{\hbar}\left[E_n(\hbar\vec{q}),\frac{eH}{c}i\frac{\partial}{\partial q_y}\right]=-\frac{1}{\hbar}\frac{eH}{c}\left\{\cancel{E_n\frac{\partial}{\partial q_y}}-\frac{\partial E_n}{\partial q_y}-\cancel{E_n\frac{\partial}{\partial q_y}}\right\}=\frac{eH}{c}\underbrace{\frac{\partial E_n}{\hbar\partial q_y}}_{\frac{\partial E_n}{\partial p_y}=V_n^y}$$

$$\hbar\dot{q}_y = \frac{i}{\hbar}\left\{-V_n^x\frac{e}{c}H\left[-i\frac{\partial}{\partial q_y},\hbar q_y\right]+\left[E_n(\hbar\vec{q}),0\right]\right\}=-\frac{1}{\cancel{\hbar}}V_n^x\frac{eH}{c}\cancel{\hbar}\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial q_y},q_y\right]}_{1}$$

$$\hbar\dot{q}_y=\frac{i}{\hbar}\left\{-V_n^x\frac{e}{c}H\left[-i\frac{\partial}{\partial q_y},\hbar q_y\right]+\left[E_n\left(\hbar\vec{q}\right),0\right]\right\}=-\frac{1}{\cancel{\hbar}}V_n^x\frac{eH}{c}\cancel{\hbar}\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial q_y},q_y\right]}_{1}$$

$$\hbar\dot{q}_y\simeq-\frac{eH}{c}V_n^x$$

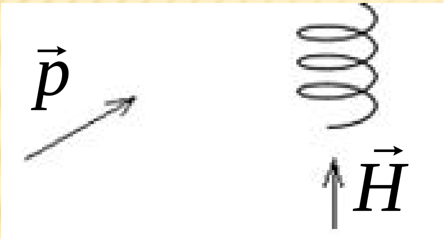
$$\hbar\dot{q}_z\simeq 0$$

Таким образом, в линейном приближении окончательно мы получаем

$$\begin{cases}\hbar\dot{q}_x\simeq\frac{eH}{c}V_n^y,\\ \hbar\dot{q}_y\simeq-\frac{eH}{c}V_n^x,\\ \hbar\dot{q}_z\simeq 0.\end{cases}$$

$$\dot{\vec{p}} \equiv \hbar \dot{\vec{q}} = \frac{e}{c} \underbrace{\left[\vec{V}_n \quad \vec{H} \right]}_{\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ V_n^x & V_n^y & V_n^z \\ 0 & 0 & H \end{vmatrix}}$$

-получилась вроде как магнитная составляющая



силы Лоренца; однако $\vec{p}$ - не импульс.

$$\dot{p}_z = 0 \rightarrow p_z = p_{z0} = const$$

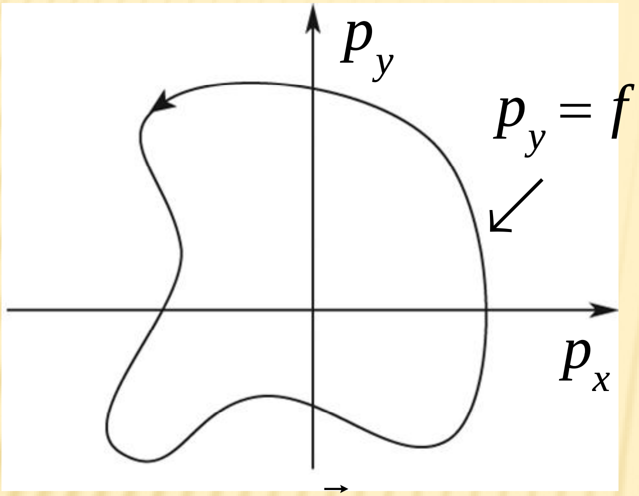
$$\frac{dE_n(\vec{q})}{dt} = \frac{\partial E_n}{\hbar \partial \vec{q}} \left(\hbar \dot{\vec{q}} \right) = \left(\vec{V}_n, \frac{e}{c} \left[\vec{V}_0 \vec{H} \right] \right) \equiv 0$$

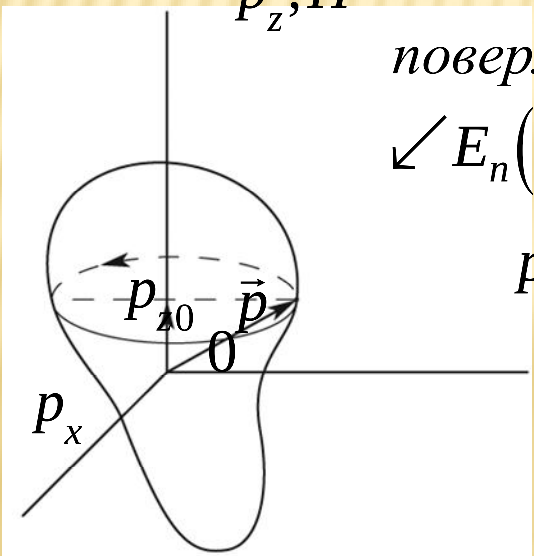
То есть $E_n\left(p_x, p_y, p_{z0} \right) \equiv E_0 = const'$

Это уравнение определяет в импульсном пространстве поверхность

$$p_y = F\left(p_x; E_0, p_{z0}\right)$$

Зависимость $p_y\left(p_x\right)$ есть траектория, по которой движется электрон в импульсном пространстве. Эта кривая называется годограф.





Электрон, находящийся на этой поверхности при заданном значении E_0, в магнитном поле с нее никуда уйти не может.

$p_{z0} = const$, следовательно, проводим секущую плоскость $\perp OZ$;

Все точки получившейся кривой удовлетворяют двум условиям

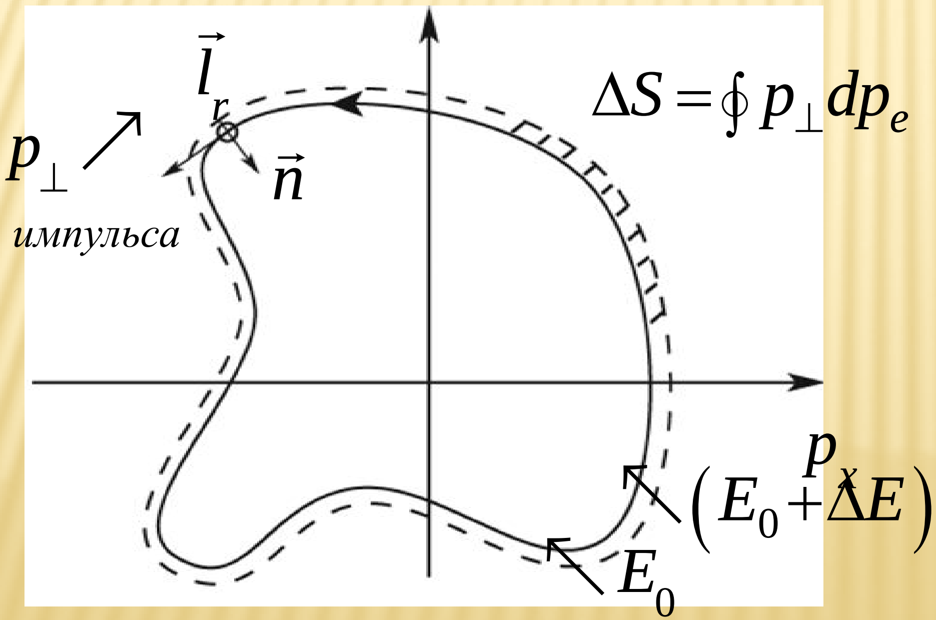
$$\left(p_{z0} = const; \;\; E_0 = const \right)$$

Введем три вектора:

$\vec{l}$ - касательная к годографу;

$\vec{n}$ - нормаль к годографу;

$\vec{l}_r \in$ плоскости $\perp$ годографу.



приращение импульса по нормали

$$\dot{\vec{p}} \equiv \hbar \dot{\vec{q}} = \frac{e}{c}\left[\vec{V}_n \vec{H}\right] \qquad \times \vec{l}$$

$$\frac{d\vec{p}_l}{dt} = \frac{eH}{c}\left(\vec{l}\left[\vec{V}_n \vec{l}_z\right]\right) = \frac{eH}{c}\left(\vec{V}_n \underbrace{\left[\vec{e}_z \vec{l}\right]}_{\vec{n}}\right) = \frac{eH}{c} V_n^{\perp}$$

$dt = \dfrac{c}{eH}\dfrac{dp_l}{V_n^{\perp}}$ - интервал времени, за который электрон пройдет участок dp_l. Двигаясь по замкнутой кривой, электрон рано или поздно вернется в исходную точку.

Период такого движения : $T = \dfrac{c}{eH}\oint \dfrac{dp_l}{V_n^{\perp}} \equiv \dfrac{2\pi}{\omega_H^*}$.

$$\omega_H^* = \frac{1}{\frac{1}{2\pi}\frac{c}{eH}\oint\frac{dp_l}{V_n^\perp}} \equiv \frac{eH}{cm_H^*}$$

$$\boxed{m_H^* \equiv \frac{1}{2\pi}\oint\frac{dp_l}{V_n^\perp}}$$ - циклотронная эффективная масса.

Чем больше длина годографа (охватываемая им площадь), тем больше масса.

$$p_\perp = \frac{1}{\frac{\partial E_n}{\partial p_\perp}}\Delta E = \frac{1}{V_n^\perp}\Delta E$$

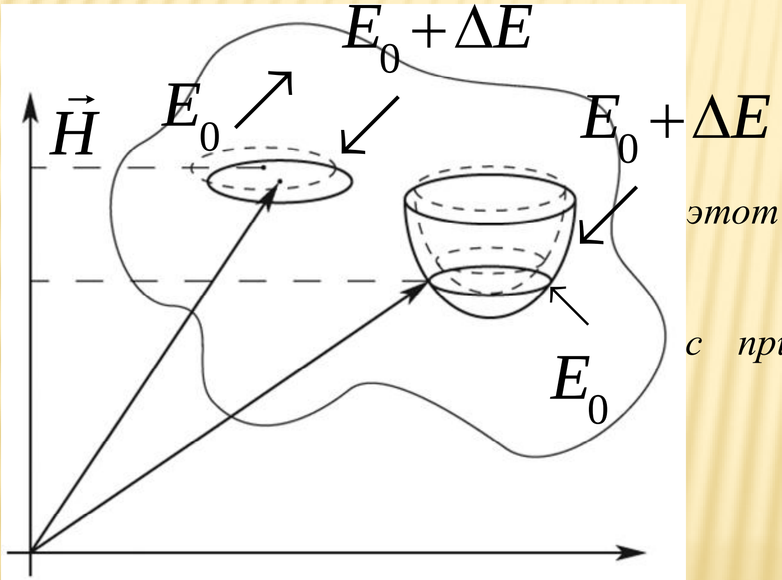
$$\Delta S = \oint\frac{1}{V_n^\perp}dp_l\Delta E$$

$$\oint\frac{dp_l}{V_n^\perp} = \frac{\Delta S}{\Delta E}$$

$$\boxed{m_H^* = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial S(E, p_z)}{\partial E}}$$

Таким образом, эффективная масса определяется скоростью изменения площади охваченной годографом при изменении энергии.

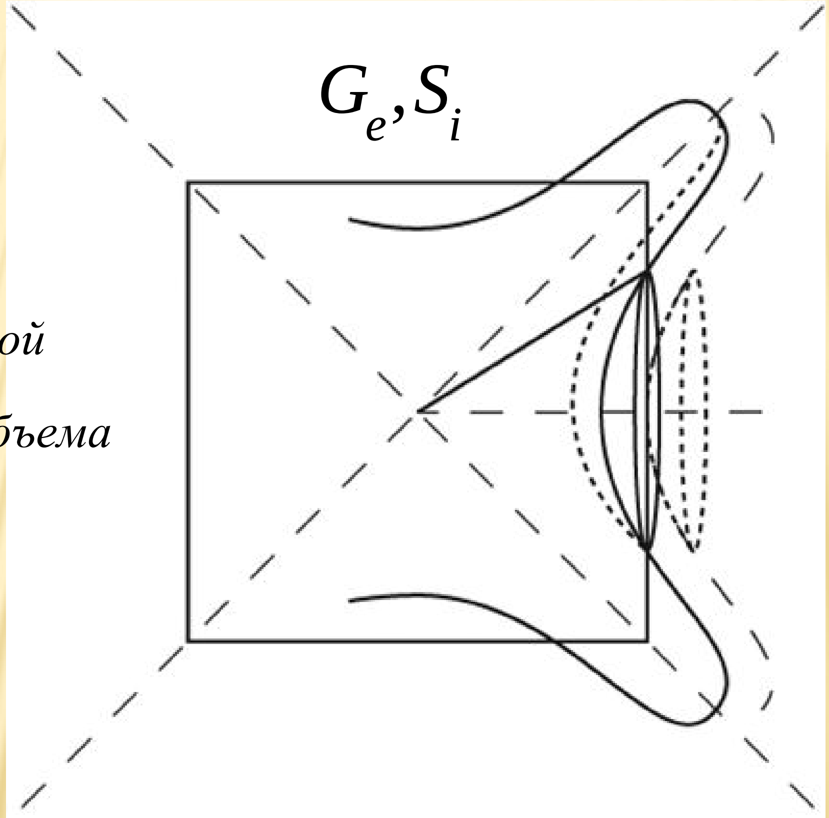
На поверхности постоянной энергии могут быть невыпуклые области.



этот годограф "сожмется" с приростом энергии $\rightarrow$ *отрицательная эффективная масса*

В силу симметрии (например, кубическая решетка), исходная поверхность постоянной энергии – куб, взаимодействие “растягивает” его по диагоналям.
Если поле направлено перпендикулярно грани, то реализуется ситуация отрицательной циклотронной эффективной массы.

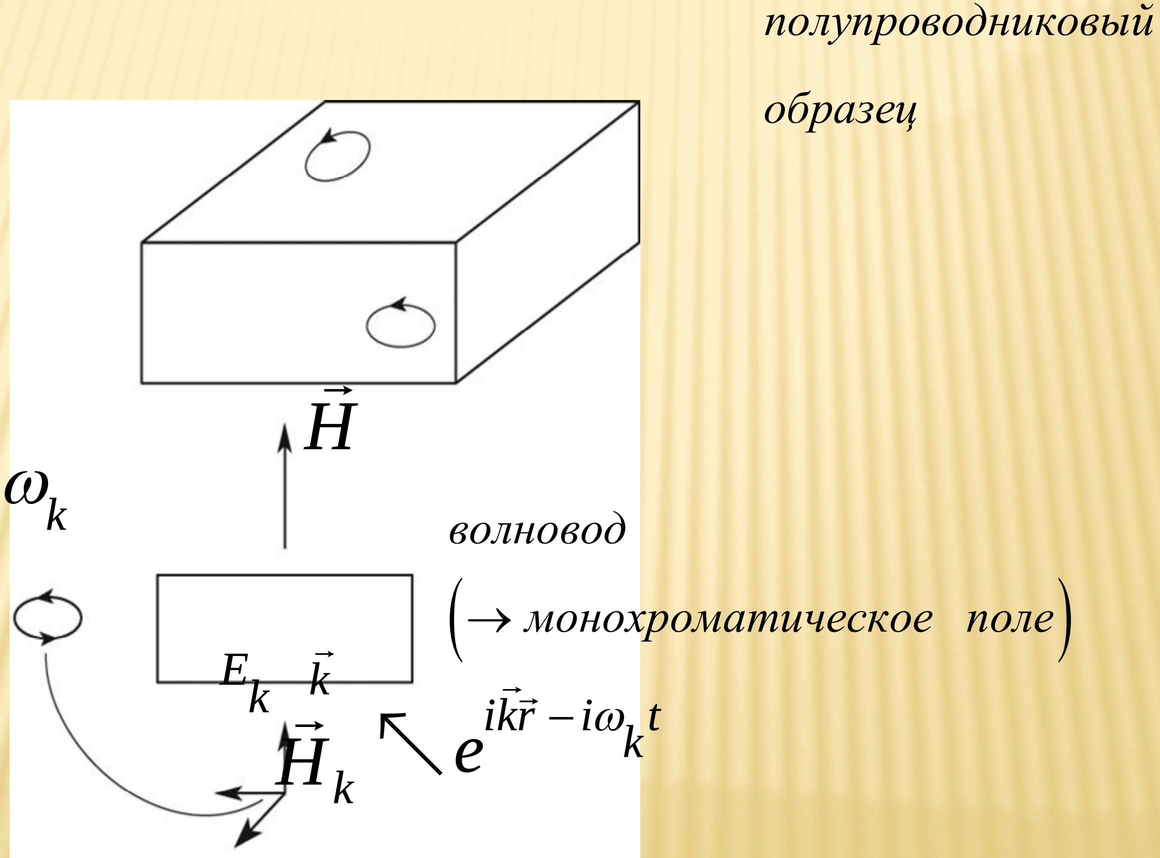
куб тянем по главной диагонали с сохр. объема



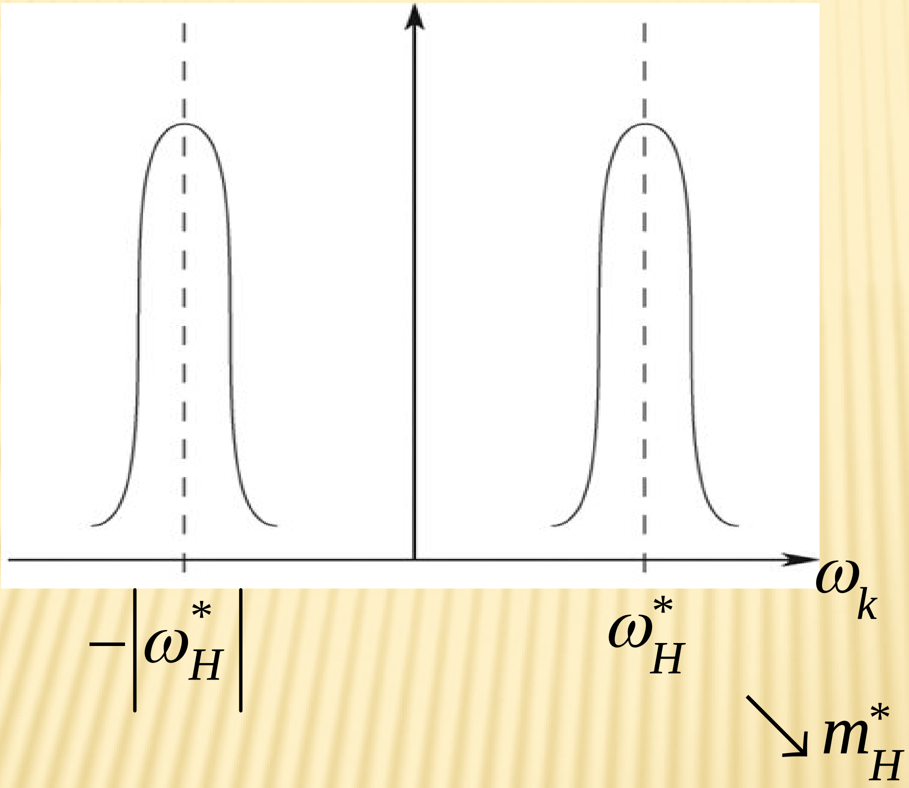
В некотором магнитном поле у каждой частицы – свой годограф.

Если частоты вращения поля ω_k и вращения электрона по годографу не совпадают, ничего не происходит; если совпадают – в системе покоя электрона на него действует постоянное электронное поле, которое перемещает (разгоняет) электрон!

Электрон поглощает квант поля $\hbar\omega_k$.

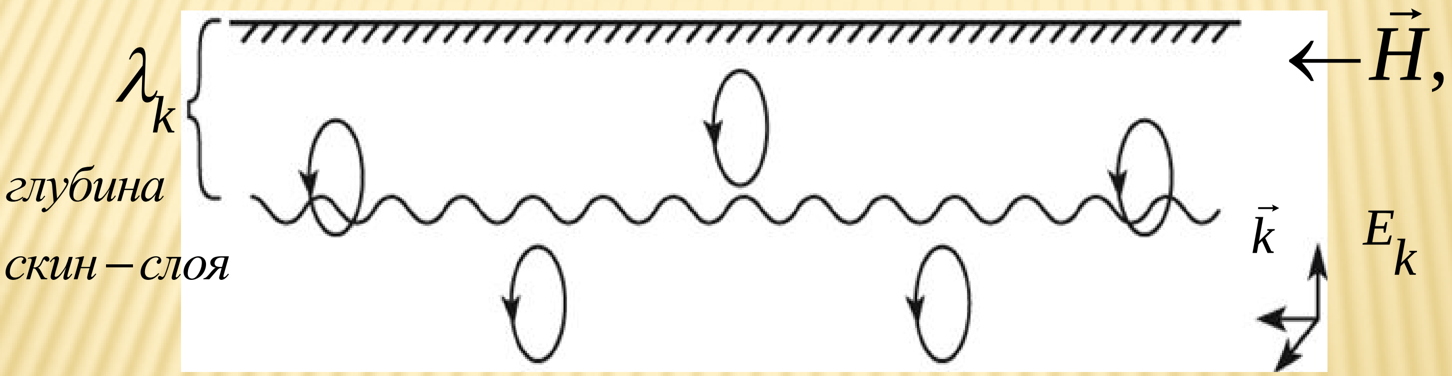


Поляризуем волну по кругу.



Диамагнитный резонанс. По пикам можно вычислить ω_H^* и m_H^*.

Если это не полупроводник, а металл, то магнитное поле проникает только на глубину скин – слоя; электроны будут вести себя по разному:



Для годографов, частично попадающих в скин – слой, электроны ускоряются подобно циклотронным – на участках пути, где приложено поле.
Тогда (при совпадении частот) получаем пик поглощения - <u>циклотронный резонанс.</u>